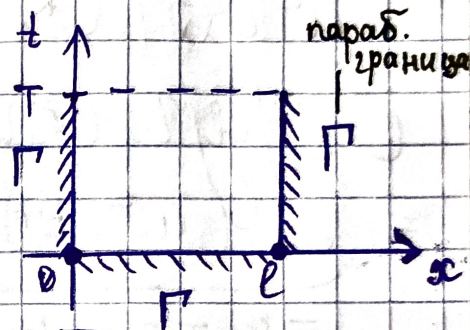


11/10 Применение принципа extr

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T$$

$$u(0, t) = \mu_0(t), \quad u(l, t) = \mu_1(t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$



* Реш. из класса $u \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$

Стандарт. (необх.) требования на дан-

ные: $\mu_0, \mu_1 \in C[0, T], \varphi \in C[0, l],$

$\mu_0(0) = \varphi(0), \mu_1(0) = \varphi(l)$ - усл-я согласо-
вания дан-
ных

И в дальнейшем считаем выполненными

[усл-я]

1 (Принцип позитивности) $u \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$ - реш. зад. (1), где $\mu_0(t) \geq 0, \mu_1(t) \geq 0$

при $0 \leq t \leq T$ и $u(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq l$. Тогда
 $u(x, t) \geq 0$ при $\forall (x, t) \in \bar{\Pi}$.

▲ Это усл. $m = \min_{\bar{\Pi}} u(x, t) \geq 0$. Это принцип
 $\text{extr}(\min)$, ф-ция $u(x, t) \geq m \geq 0$ при $\forall (x, t) \in \Pi$ (и $\bar{\Pi}$) ■

Т₂ (!) Заг.(1) может иметь не более одне-
 го реш-я в классе $C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$

▲ $\exists u^{(1)}(x, t), u^{(2)}(x, t)$ — 2 реш. с общ. дан-
 ными в этом классе. $\& u(x, t) = u^{(2)}(x, t) -$
 $- u^{(1)}(x, t)$, г/д
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t \leq T, \\ (1.) \quad u(0, t) = 0, & u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

При этом $u \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$. Это принципу

$\text{extr}: 0 = \min_{\bar{\Pi}} u \leq u(x, t) \leq \max_{\bar{\Pi}} u = 0, \forall (x, t) \in \bar{\Pi}$.

$\Rightarrow u(x, t) \equiv 0$ и $u^{(2)}(x, t) \equiv u^{(1)}(x, t)$ всюду в $\bar{\Pi}$ ■

! Зап Ранее была доказана! В более узком
 классе $u \in C^{2,1}([0, l] \times (0, T]) \cap C([0, l] \times$
 $\times [0, T])$, но зато г/всех кр. усл.

Т₃ (Принцип устойчивости) $\exists u \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ — реш. зад. (1). и $\tilde{u} \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ — реш.

возмущенной задачи (I)
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = \tilde{\mu}_0(t), & u(l, t) = \tilde{\mu}_1(t), \\ u(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \end{cases}$$

приведем $|\tilde{\mu}_0(t) - \mu_0(t)| \leq \varepsilon$ и $|\tilde{\mu}_1(t) - \mu_1(t)| \leq \varepsilon$
при $0 \leq t \leq T$ и $|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ при $0 \leq x \leq l$.
Тогда $|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \varepsilon$ при всех $(x, t) \in \Pi$
(или $\bar{\Pi}$)

▲ разность $v(x, t) = \tilde{u}(x, t) - u(x, t)$, $v \in C^{2,1}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$:
$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, & 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ v(0, t) = \tilde{\mu}_0(t) - \mu_0(t), & v(l, t) = \tilde{\mu}_1(t) - \mu_1(t), \\ v(x, 0) = \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x). \end{cases}$$

Это усл., $-\varepsilon \leq \tilde{\mu}_k(t) - \mu_k(t) \leq \varepsilon$ при $0 \leq t \leq T$,
 $k = \overline{0, \infty}$; $-\varepsilon \leq \tilde{\varphi}(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$ при $0 \leq x \leq l$.
 $\Rightarrow m \equiv \min_{\bar{\Pi}} v \geq -\varepsilon$ и $M \equiv \max_{\bar{\Pi}} v \leq \varepsilon$. По
принципу экстр., получаем $v(x, t) \leq M \leq \varepsilon$ при $\forall (x, t) \in \Pi$
 $\in \bar{\Pi} \Rightarrow -\varepsilon \leq \tilde{u}(x, t) - u(x, t) \leq \varepsilon$ при $\forall (x, t) \in \bar{\Pi}$ или
 $|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \varepsilon$ всюду в $\bar{\Pi}$.

Принцип устойчивости важен для вычислительной математики. Он показывает, что при малых возмущениях данных в зад. (I) реш.

тоже возмущ-ся мало

Преобразование Фурье (ПФ) и его применение в задачах МФ

На примере ф-ции теплопровод-ти

ПФ заменяет ряды Ф. в случае, когда размеры основной физ. среды считаются неогранич. (т.е. очень большими по сравнению с размерами наблюдателя)

Мнимая экспонента $x, \xi \in \mathbb{R}$ (действительные перем-е), $i^2 = -1$

$$\left. \begin{aligned} e^{i\xi x} &= \cos(\xi x) + i \sin(\xi x) \\ e^{-i\xi x} &= \cos(\xi x) - i \sin(\xi x) \end{aligned} \right\} \text{ (ф-ны Эйлера)}$$

Св-ва: 1) $|e^{i\xi x}| = 1$, $|e^{-i\xi x}| = 1$;

//очевидные//

2) $e^{-i\xi x} = \overline{e^{i\xi x}}$;

3) $\frac{d}{dx}(e^{i\xi x}) = i\xi e^{i\xi x}$, $\frac{d}{dx}(e^{-i\xi x}) = -i\xi e^{-i\xi x}$

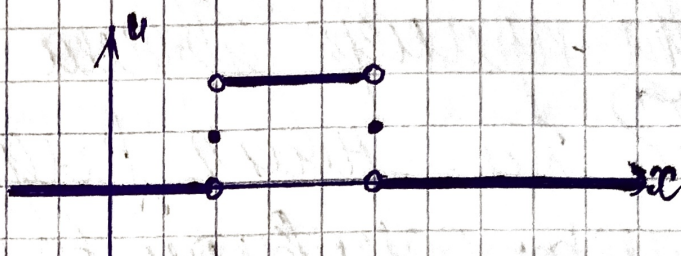
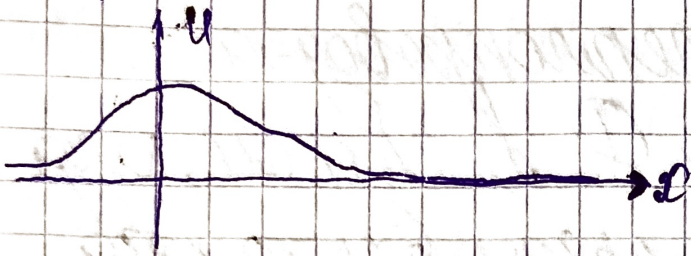
$$\frac{d}{d\xi}(e^{i\xi x}) = ix e^{i\xi x}, \quad \frac{d}{d\xi}(e^{-i\xi x}) = -ix e^{-i\xi x}$$

Три классич. использования ПФ используют специал. класс ф-ций $f \in \mathcal{F}(-\infty, +\infty)$,
 $\Leftrightarrow$ 1) $f = f(x)$ кусоч.-задн. на $\mathbb{R}$;

$$2) |f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0;$$

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$$

$$[f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ или } f: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}]$$



* $f \in \mathcal{F}(-\infty, +\infty)$, тогда можно определить новую ф-цию — прямоe ПФ:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Обратное ПФ: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$

! Зам В обратном ПФ $\int$ понимается в смысле мев. знач.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a F(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Запись ПФ: $f(x) \leftrightarrow F(\xi)$

Главное св-во ПФ: $f, f' \in \mathcal{F}(-\infty, +\infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) \leftrightarrow i\xi F(\xi)$$

▲ То епр, $f'(x) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\xi x} dx =$
 $= f'(x) e^{-i\xi x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-i\xi e^{-i\xi x}) dx =$
 $= i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = i\xi F(\xi)$ ■

$$f'(x) \leftrightarrow i\xi F(\xi)$$

$$f^{(k)}(x) \leftrightarrow (i\xi)^k F(\xi)$$

// самое важное св-во ПФ

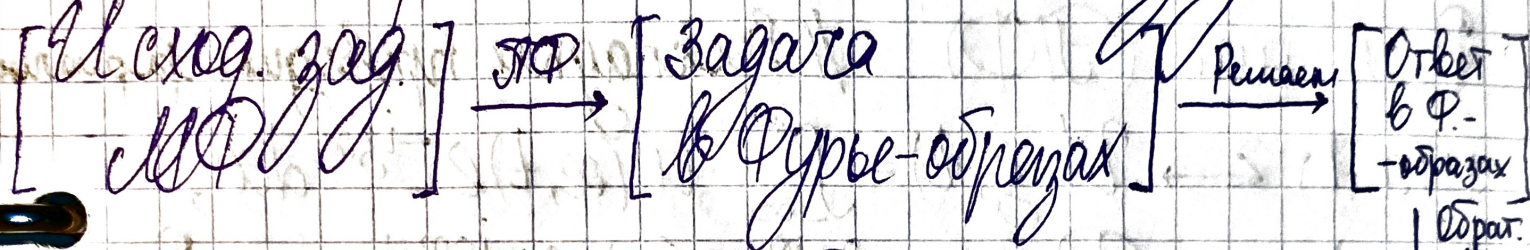
При применении ПФ встречаются след. полезные

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad // \text{Эйлера-Пуассона}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

// типа Э.-П.

Схема применения ПФ в задачах МФ



В задачах МФ ПФ обычно применяют формально, не заботясь об обоснованиях (считая, что все необход. усл-я вып-ны). Как правило, обосновывают итоговую ф-лу, т.к. она действует в более широких классах, чем позволяет классич. ~~ф-ла~~ ф-ла Фурье

[Ответ исходной задачи]